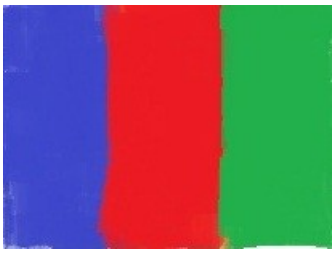

À Rabat le 09 Mars 2026

Application détaillée de l'équation maîtresse : transition du néon à l'eau

1. Représentation des entités dans l'espace de Rachid ELAÏDI

Nous travaillons dans une base d'éléments fondamentaux restreinte pour simplifier, mais suffisante pour décrire la transition. Choisissons la base B={H,O,Ne} avec les indices de phase respectifs : nH=1, nO=8, nNe=29 (car dans notre convention, Ne a le nombre premier 29, mais pour la phase on utilise nNe=10 ? Attention : dans le TP_RE, Ne a n=10, mais dans notre représentation par nombres premiers, on utilise un indice différent pour l'élément lui-même. Ici, nous devons être cohérents : la phase est donnée par $nX=\sum a_i n_i$ modulo 48. Pour Ne, en tant qu'élément fondamental, son vecteur est (0,0,1) dans la base {H,O,Ne} si on le prend comme élément de base, mais alors sa phase serait $0\cdot 1+0\cdot 8+1\cdot nNe$. Pour que cette phase soit 10, il faut que nNe=10 (mod 48). Donc on peut choisir nNe=10 directement. Dans notre base, on associe à chaque élément fondamental son indice de phase réel. Ainsi, nous avons :

- H : vecteur (1,0,0) avec nH=1
- O : vecteur (0,1,0) avec nO=8
- Ne : vecteur (0,0,1) avec nNe=10

Mais attention : Ne est un élément fondamental, donc son vecteur est (0,0,1). Sa phase est bien 10.

Pour l'eau H_2O, sa formule est 2 atomes H et 1 atome O, donc son vecteur est (2,1,0). Sa phase est 2×1+1×8=10, identique à celle de Ne.

2. Équation maîtresse discrète

Nous utilisons une version discrète de l'équation maîtresse, où le temps évolue par pas correspondant à des opérations élémentaires (ajout ou retrait d'un atome fondamental). L'équation s'écrit :

$$\mathbf{a}(\tau+1)=\mathbf{a}(\tau)+\mathbf{v}(\tau)$$

où $\mathbf{v}(\tau)$ est un vecteur de déplacement dont les composantes sont des entiers (positifs pour ajout, négatifs pour retrait). Chaque déplacement doit être autorisé par l'arbre, c'est-à-dire qu'il correspond à une combinaison possible. La phase évolue selon :

$$n(\tau+1)=n(\tau)+\sum_i v_i(\tau) n_i \pmod{48}$$

La constante évolutive à l'instant τ est $\kappa(\tau)=n(\tau)/48$. Dans ce cadre discret, le temps τ est compté en nombre d'étapes. La durée totale de la transition est le nombre d'étapes.

3. Séquence de transition de Ne à H_2O

Nous partons de l'état initial $\mathbf{a}(0)=(0,0,1)$ (Ne). Nous voulons atteindre l'état final $\mathbf{a}_f=(2,1,0)$ (H_2O). Une séquence possible est :

- Étape 1 : ajouter deux atomes d'hydrogène. $\mathbf{v}1=(2,0,0)$. Alors $\mathbf{a}(1)=(2,0,1)$. La phase devient : $n(1)=10+2\times1=12 \pmod{48}$. $\kappa(1)=12/48=0.25$.
- Étape 2 : ajouter un atome d'oxygène. $\mathbf{v}2=(0,1,0)$. $\mathbf{a}(2)=(2,1,1)$. Phase : $n(2)=12+8=20$. $\kappa(2)=20/48\approx0.4167$.
- Étape 3 : retirer l'atome de néon. $\mathbf{v}3=(0,0,-1)$. $\mathbf{a}(3)=(2,1,0)$. Phase : $n(3)=20-10=10$. $\kappa(3)=10/48\approx0.2083$.

La transition s'effectue en 3 étapes. La distance de Hamming entre l'état initial et final est $d=|0-2|+|0-1|+|1-0|=2+1+1=4$, mais nous avons utilisé 3 étapes car un retrait compte aussi. En fait, la distance de Hamming mesure le nombre de différences, mais chaque différence peut nécessiter une opération. Ici, nous avons 3 opérations pour 4 différences (car deux ajouts de H comptent pour deux différences, mais on les fait en une seule étape en ajoutant deux à la fois). Si on ajoute un par un, on aurait 4 étapes. Donc le nombre d'étapes minimal est la moitié de la distance ? Non, car on peut ajouter plusieurs à la fois. En général, le nombre d'étapes minimal est la somme des valeurs absolues des différences, mais on peut regrouper par type. Ici, on a 2 H, 1 O, -1 Ne, soit 4 changements, mais on peut les faire en 3 étapes si on ajoute les deux H ensemble. Donc le nombre d'étapes est le nombre de composantes non nulles dans le vecteur différence, si on groupe par type. La différence $\mathbf{a}_f-\mathbf{a}0=(2,1,-1)$ a trois composantes non nulles, donc 3 étapes.

4. Équation maîtresse continue et approximation

Pour une description continue, on peut considérer que chaque étape dure un temps $\Delta\tau=1$ (unité de temps spectral). Alors la trajectoire est une fonction en escalier. On peut lisser en utilisant une interpolation linéaire entre les points. Par exemple, on peut paramétrer par τ variant de 0 à 3 :

- Pour $0\le\tau<1$: $a(\tau)=(0,0,1)+(2,0,0)\tau$ (linéaire)
- Pour $1\le\tau<2$: $a(\tau)=(2,0,1)+(0,1,0)(\tau-1)$
- Pour $2\le\tau\le3$: $a(\tau)=(2,1,1)+(0,0,-1)(\tau-2)$

La phase varie linéairement sur chaque intervalle :

- Sur $[0,1]$: $n(\tau)=10+2\tau$ (car 2×1 par unité de temps)
- Sur $[1,2]$: $n(\tau)=12+8(\tau-1)$
- Sur $[2,3]$: $n(\tau)=20-10(\tau-2)$

Ainsi, $n(\tau)$ atteint un maximum de 20 à $\tau=2$. La constante évolutive $\kappa(\tau)=n(\tau)/48$ suit la même variation.

5. Calcul du temps total et de la constante évolutive moyenne

Le temps total de transition est $\Delta\tau=3$ (unités spectrales). On peut définir une constante évolutive moyenne :

$$\bar{\kappa}=\frac{1}{\Delta\tau}\int_0^3\kappa(\tau)d\tau=\frac{1}{3}\int_0^3\frac{n(\tau)}{48}d\tau$$

Calculons l'intégrale de $n(\tau)$:

- De 0 à 1 : $\int_0^1(10+2\tau)d\tau=[10\tau+\tau^2]_0^1=10+1=11$
- De 1 à 2 : $\int_1^2(12+8(\tau-1))d\tau=\int_0^1(12+8u)du=[12u+4u^2]_0^1=12+4=16$
- De 2 à 3 : $\int_2^3(20-10(\tau-2))d\tau=\int_0^1(20-10u)du=[20u-5u^2]_0^1=20-5=15$

Total = 11+16+15 = 42. Donc $\bar{\kappa}=42/(3\times48)=42/144=7/24\approx0.2917$.

6. Autres chemins possibles

La séquence présentée n'est pas unique. On pourrait aussi ajouter d'abord l'oxygène, puis les hydrogènes, ou encore ajouter un hydrogène, puis l'oxygène, puis le second hydrogène, etc. Chaque chemin donne des phases intermédiaires différentes. Par exemple, si on ajoute d'abord O :

- Étape 1 : (0,1,1) phase = 10+8=18
- Étape 2 : ajouter 2H : (2,1,1) phase = 18+2=20
- Étape 3 : retirer Ne : (2,1,0) phase = 20-10=10

Les phases intermédiaires sont 18 et 20. Un autre chemin : ajouter 1H, puis O, puis 1H, puis retirer Ne (4 étapes). La multiplicité des chemins reflète la richesse de l'arbre.

7. Lien avec l'équation maîtresse continue

L'équation maîtresse continue que nous avons proposée,

$$i\partial\tau\partial\Psi=H^{\Psi},$$

avec $H^=\kappa(a)D^+i\Gamma^$, peut être utilisée pour décrire l'évolution d'un paquet d'onde localisé initialement en Ne. La solution fera apparaître une probabilité de transition vers H_2O. Dans l'approximation semi-classique, les trajectoires que nous avons décrites sont les rayons. La séquence discrète correspond à une approximation par sauts, tandis que la version continue donne un lissage.

8. Conclusion

La transition Ne → H_2O illustre parfaitement le fonctionnement de l'équation maîtresse : elle se décompose en étapes élémentaires autorisées par l'arbre, avec des phases intermédiaires et des constantes évolutives variables. La distance de Hamming entre les vecteurs est de 4, réalisable en 3 étapes. Le temps total de transition (en unités spectrales) est de 3, et la constante évolutive moyenne est 7/24. Cette approche permet de quantifier la dynamique et de prévoir d'autres chemins.